



TITLE:

# 水文時系列解析の紆余曲折 (時系列解析の推測 : 理論と応用)

AUTHOR(S):

尾崎, 統

---

CITATION:

尾崎, 統. 水文時系列解析の紆余曲折 (時系列解析の推測 : 理論と応用). 数理解析研究所講究録 1981, 418: 71-94

ISSUE DATE:

1981-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/102503>

RIGHT:

## 水文時系列解析の紆余曲折

統計数理研 尾崎 純

## 1. はじめに

夏になると毎年のように大都市での水不足が問題になる。水不足や水害などの水問題は現代特有の問題ではなく、古代エジプトやローマ時代から社会的に大きな問題であった。水の循環を地球上の一つのシステムとして捉え科学的に論じたのはレオナルド・ダ・ヴィンチが最初であると言われている。現存する彼の手記「科学論」<sup>1)</sup>の中で、水に関する記述はかなり大きな部分を占めている。もちろん彼の記述の中には現代の我々からみて誤った点もあるが、それは15世紀という時代の制約を考慮すればむしろ当然であろう。それより彼の手記にみられる「自然の観察」と「思考」との間の生き生きとした「やりとり」の中に、ルネッサンス期の科学に対する自由な態度が感じられて興味深い。水の循環に関する科学(水文学)に限らず一般に科学における方法論に関して当時と現代の違いを比べてみると、大きな違いの一つに現象の「量的な把握」と

いう点がある。現代の計測技術の進歩とコンピュータによる高速情報処理技術の進歩は、自然現象の量的な把握という面から前記の「自然の観察」と「思考」のやりとりにも大きな影響を与えているように思われる。

さて現代では石油などの地球上の資源が有限であると同じように地球上の水も、したがって日本列島の上に降る雨の量も有限であり、その有限な水を如何に無駄なく使うかということが問題になってきている。水利用の最適化といった問題を考える場合、どうしても水の循環に関する量的な把握が必要になる。言いかえると毎日の降雨量や河川流量の変化に関する定量的なモデルが必要になる。我々は河川の模擬流量発生のためのモデルと流量予測のためのモデルの発展の経過を追いつながり、現象の量的な把握と新しい統計モデルの開発とがいかに関接に関わり合っているかを見ることにしよう。

## 2. Hurst現象と模擬流量発生モデル

モデルにより模擬流量を発生させる時、我々は当然それが実測流量と同じ統計的性質を保持していることを期待する。流量時系列の統計的性質としては例えば、流量がある値を超える確率や、最大値、最小値の漸近的性質などがあるが、なかでもダムに適正規模の決定に係る調整変動域と呼ばれ

る統計量の性質が多くの人々の関心を引いてきた。流量時系列  $X_1, \dots, X_N$  が与えられた時その調整変動域  $R_N^*$  は、次式で定義される。

$$R_N^* = M_N^* - m_N^*$$

ここに  $M_N^* = \max_{1 \leq k \leq N} S_k^*$ ,  $m_N^* = \min_{1 \leq k \leq N} S_k^*$ ,  $S_k^* = S_{k-1}^* + (X_k - \bar{X}_N)$ ,  $S_0 = 0$ ,  $\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t$  である。

いまある河川で毎日  $X_t$  トンの水が流れているとする。そこにダムを造って水を塞ぎ止めそのダムから毎日水を  $\bar{X}_N$  トン放流するとした時、増水期が続くと  $k$  日目までの貯蔵量  $S_k^*$  は正の値が累積して大きくなるし逆に平均流量以下の日が続くと  $S_k^*$  は負の値が累積して小さくなるが、 $N$  日目までのダムの最高貯蔵量  $M_N^*$  と最低貯蔵量  $m_N^*$  の差が  $R_N^*$  の意味するものである（図1参照）。洪水と渇水を防ぐ為にはダムの容量を  $R_N^*$  以上にする事が望ましいのは言うまでもない。ところがこの  $R_N^*$  は流量時系列  $X_1, \dots, X_N$  の関数であるから統計量であり、その統計的性質を知らなくてはダムの適正規模の決定などの参考にはならない。

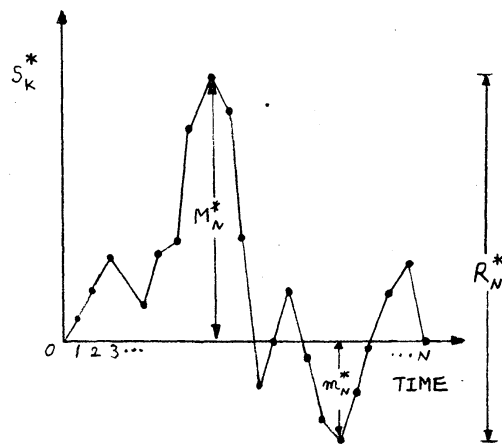


図1 調整変動域

$R_N^*$  の標準偏差  $D_N^* = \left( \sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X}_N)^2 / N \right)^{1/2}$  で割った正規調整変

動域  $\overline{R}_N^* = R_N^* / D_N^*$  の統計的性質に関して以下の事実が Hurst<sup>2)</sup> によって指摘された。

1.  $\overline{R}_N^* \propto N^K$

2. 正規分布する独立な系列  $X_1, \dots, X_N$  に対しては

$$E[\overline{R}_N^*] = 1.2533 N^{\frac{1}{2}}, \text{ すなわち } K=0.5 \text{ が成り立つ。}$$

3. 経験式

$$\overline{R}_N^* = \left(\frac{N}{2}\right)^K \quad (1)$$

が成り立ち、数100の河川の統計をとった結果、それらの  $K$  の平均と標準偏差は  $\bar{K} \approx 0.73$ ,  $\sigma_K \approx 0.09$  であること。

河川流量のこの非ガウスの性質は以後 Hurst 現象と呼ばれ、 $K$  は Hurst 数と呼ばれている。その後正規分布する独立な系列だけでなく自己共分散関数  $\gamma_j (= E[\tilde{X}_t \tilde{X}_{t+j}], \tilde{X}_t = X_t - E[X_t])$  が

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\gamma_j| < \infty \quad (2)$$

を満たす全ての時系列において  $K=0.5$  であることが示された<sup>3)</sup>。

(2)を満たす時系列モデルをその性質から短記憶モデル、そうでない時系列モデルを長記憶モデルと呼ぶ。したがって河川流量の模擬流量モデルとしては、ガウス過程やマルコフ型のモデルではなく

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\gamma_j| = \infty$$

の長記憶モデルで  $K > 0.5$  のモデルが望ましいということが一般に言われるようになった。Mandelbrot (1965)<sup>4)</sup> はブラウン運

動を基にして Hurst 数  $K$  をパラメーターに持つ連続過程

$$dB_K(t) = B_K(t+dt) - B_K(t)$$

を導入した。ここに

$$B_K(t) = \int_{-\infty}^t (t-s)^{K-\frac{1}{2}} dB(s)$$

で、このモデルはその形から Fractional Gaussian Noise (FGN) モデルと呼ばれている。この  $dB_K(t)$  は  $S^K$ -自己類似性(self-similarity) と呼ばれる性質、つまり

$$\{B_K(su) - B_K(0)\} / S_K$$

と、

$$B_K(u) - B_K(0)$$

が確率的に同じ性質を持ち、 $\sum |\delta_j| = \infty$  であることから模擬流量の長記憶統計モデルとして多くの水文学者や水文学に興味を持つ数学者に多大の期待を抱かせた。(FGNモデルがブラウン運動により定義されており、モデル自体をデータから推定したり、その推定したモデルの数値実験をコンピュータでやったりといった数値操作可能なモデルでなかったことが過大な期待を与えつづけたことは否めない。) しかしこの Hurst 数と FGN モデルに関する人々の信仰とも言える熱中ぶりはカナダの若い二人の水文統計学者のコンピュータを駆使した実証的研究によって冷水を浴びせられることになった。<sup>5)</sup> 彼らは FGN モデルの離散時間モデルに対する最尤法とモデルの数値実験法を導入するとともに、時系列の線型モデルとしてよく

知られた ARMA モデル

$$X_t = \mu + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t, \quad (3)$$

(ここに  $\varepsilon_t$  はホワイトノイズで、 $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ ) と FGN モデルとを対比させつつ次のような結果を出した。

1. Hurst 数はサンプル数に従属すること。したがって  $K$  がサンプル数と独立に一定値をとる FGN モデルが不自然であること。例えば正規分布する独立な系列  $X_1, \dots, X_N$  に対する  $\bar{R}_N^*$  に関しては

$$E[\bar{R}_N^*] = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(N-1))}{\sqrt{N} \Gamma(\frac{1}{2}N)} \sum_{r=1}^{N-1} \frac{N-r}{r} \quad (4)$$

が Anis & Lloyd (1976)<sup>6)</sup> によって与えられている。これを (1)

式の  $\bar{R}_N^*$  に代入すると  $K$  は

$$K' = \log \{ E[\bar{R}_N^*] \} / (\log N - \log 2)$$

で与えられる。この  $K'$  と (4) 式から導かれる理論的  $E[K]$  とを正規分布する独立な系列の  $N$  個のデータ ( $N=5 \sim 200$ ) について計算すると表 1 のような結果が成立する。

2. ARMA モデルはサンプル数

$N$  が無限大に近づくとき

$K=0.5$  であるが有限の  $N$  ( $N=5 \sim 200$ ) については

$N$	$K'$	$E[K]$
5	0.7161	0.7032
10	0.6874	0.6750
20	0.6638	0.6540
30	0.6519	0.6420
40	0.6442	0.6365
50	0.6387	0.6305
70	0.6309	0.6235
100	0.6233	0.6156
150	0.6154	0.6100
200	0.6103	0.6051

表 1

数百の規模) に対しては  $K$  は殆んどの場合 0.6 と 0.8 の間にあること。例えば流量データ ( $N=768$ ) にあてはめた  $ARMA(1,1)$  モデルを 1000 回数値実験して各データの  $K$  を計算すると表 2 のようになる。

Percentile	0.025	0.050	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.800	0.900	0.950	0.975
$K$	0.629	0.643	0.661	0.677	0.686	0.697	0.706	0.717	0.728	0.742	0.759	0.773	0.781

表 2

3. あてはめたモデルの適合度検定に関して FGN モデルが非常に不満足な結果しか与えないのに対し、ARMA モデルでは良好であること。
4. 推定した FGN モデルの自己相関関数が標本自己相関関数とひどく違うのに、ARMA モデルの場合はよく似ていること。
5. AIC の値に関しては FGN モデルより ARMA モデルのほうが小さい値をとること。

以上のことから、模擬流量モデルとしては FGN モデルより ARMA モデルのほうが良いことが結論として出されたが、それは実際の河川流量データ (図 2 参照) にあてはめた ARMA モデルと FGN モデルのシミュレーションを行った図を見比べてもうなづけるところである (図 3, 図 4 参照)。しかし ARMA モデルが本質的にガウス過程の為のものであり、明らかに上下非



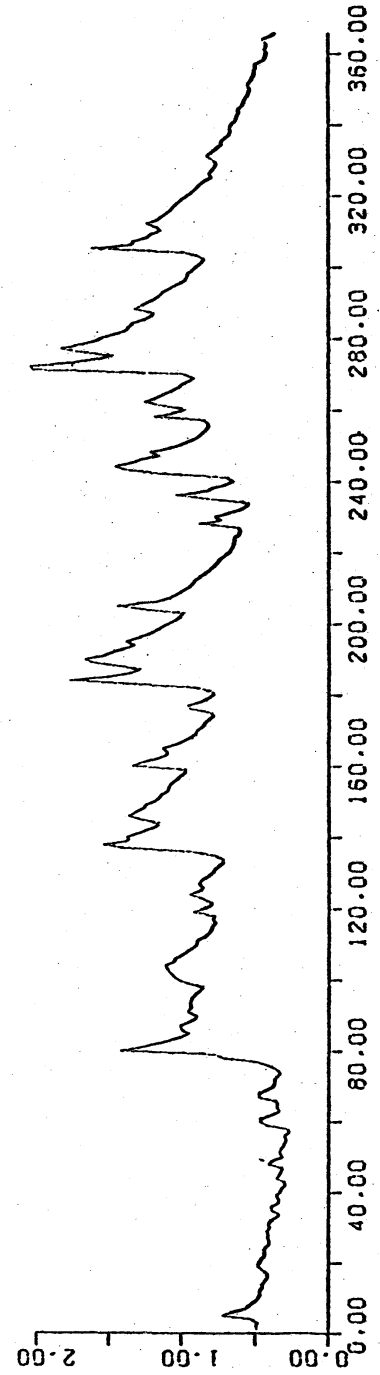
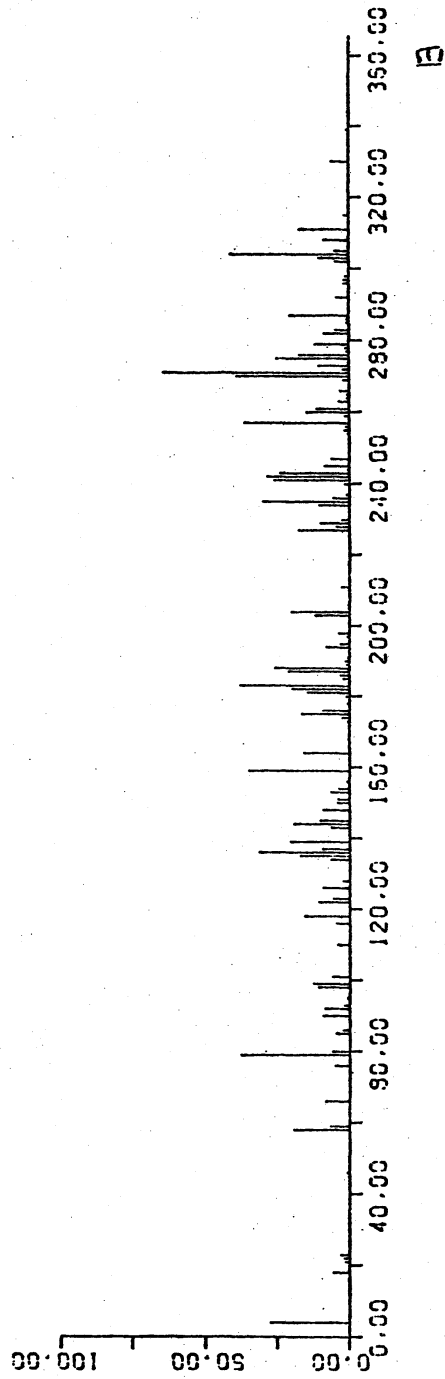


図2. 神奈川・安藤川・日流川・夕 (1956年1月1日～1956年12月31日) 日

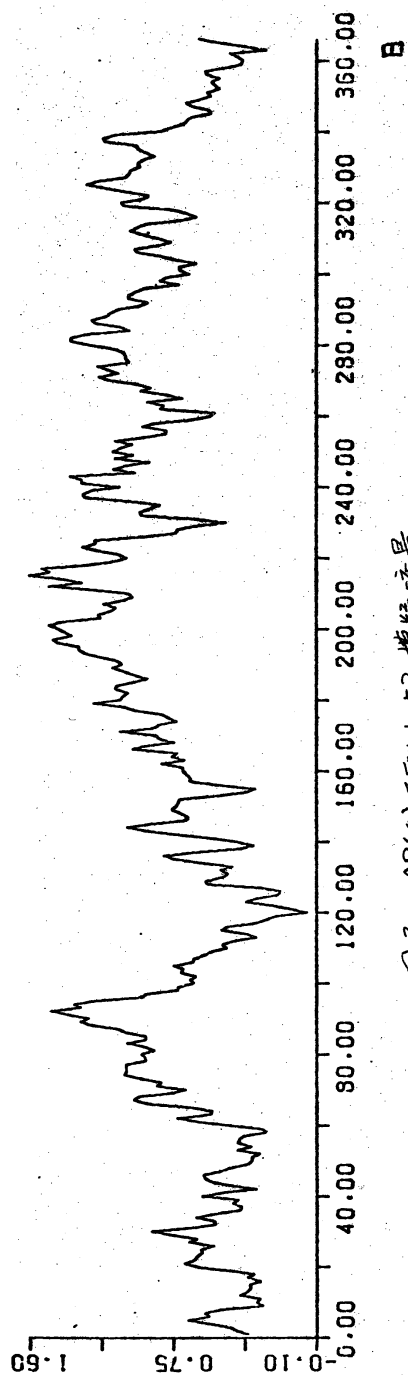


図3 AR(4)モデルによる模擬流量

日

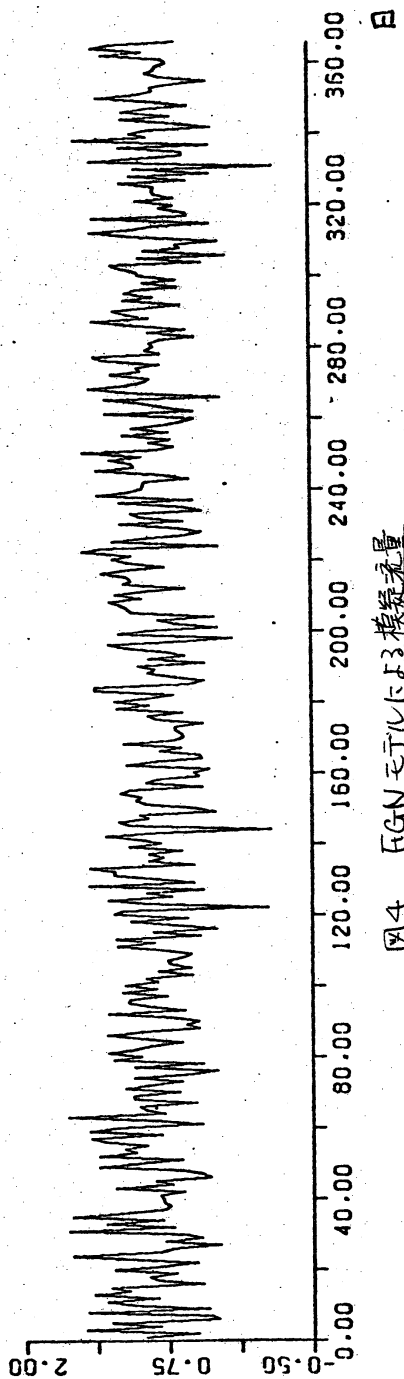


図4 FGNモデルによる模擬流量

日

対称、時間非対称なと非ガウスの特徴を持つ河川の日流量時系列のモデルとして満足はいくともあてなうことも明白であらう。我々はこの点を考慮した模擬流量発生を為す新しい統計モデルを第4節で考えることにして、その前に次節で流量時系列に関するもう一つの大きな問題点である流量の予測を為すモデルについて考えてみよう。

### 3. 流量予測モデル

模擬流量のモデルは歴史的にみて治水対策上問題とされてゐるのに対し、流量予測は主に治水対策の上から必要とされてゐる。少しでも良い予測システムが備わつてゐることが防災上の重要なポイントであることは言うまでもない。時系列の予測モデルとしてはARMAモデル(1)が一般的なものとして良く知られてゐる。その形からわかるように一ステップ先の予測値 $\hat{X}_{t+1}$ は 
$$\hat{X}_{t+1} = \mu + \phi_1 X_t + \cdots + \phi_p X_{t-p+1} + \theta_1 \varepsilon_t + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q+1}$$
 で与えられ、 $X_{t+1} - \hat{X}_{t+1} = \varepsilon_{t+1}$  が  $(t+1)$  時点での予測誤差である。ところで河川の流量の増減は降雨の影響を強く受ける。図2に見られるように降雨によつて急に増加しその後緩やかに減少する。日降雨量は殆んど河川流域で記録されてゐる為、この情報を予測モデルに取り入れることができる。そのような線型モデルとしては、降雨量時系列を $Y_t$ とすると、

$$X_t = \mu + a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} + b_1 Y_{t-1} + \dots + b_g Y_{t-g} + \varepsilon_t \quad (5)$$

が考えられる。これは  $Y_t$  を入力、 $X_t$  を出力としてもつ統計的線型入出力モデルとみることもできる。

一方、菅原(1961)<sup>7)</sup> はタンクモデルと呼ばれる決定論的入出力システムモデルを導入し、河川流量の予測に偉大な貢献をした。タンクモデルの典型的な例は図5にみられるような構造になっている。

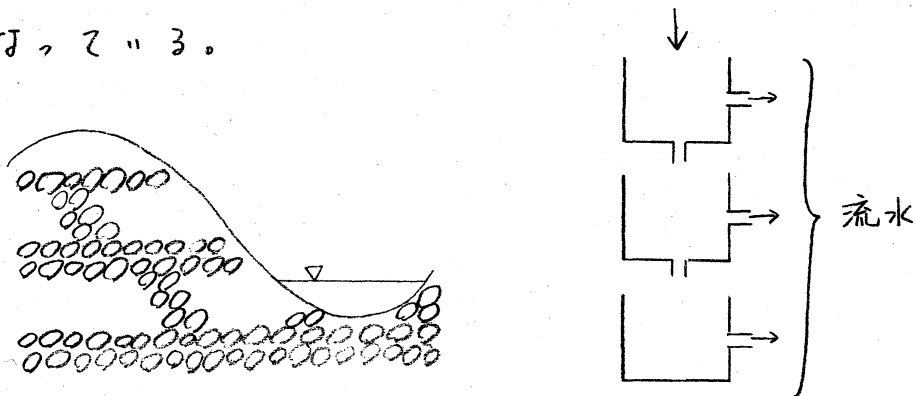


図5. タンクモデル概念図

降。大雨は底や壁の穴から流れ出て次第に下のタンクに行き最終的に河川流量となる。タンクの数、穴の数、穴の大きさや側孔の高さを変えることによって、それぞれの河川の雨量と流量の非線型な関係を表現しようというものである。例えば最下段のタンクの穴を底面より少し高くしておけば少量の降雨では流量が増加しないという非線型現象が再現でき、最上段のタンクの側孔を数多くつくっておけば大雨の時は非線型的に流量が増加する現象を再現できる。このような柔軟な構造をもつタンクモデルも唯一の弱点を持つ。それは良

いモデルを探すのに人間が試行錯誤の中から見つけなければならぬ点である。統計モデルのようにAIC最小化のような客観的基準のもとにコンピュータで自動的に探し出すということはできない。但し、人間の試行錯誤の学習過程そのものをコンピュータに真似させることはできるわけで、現在タンクモデルの決定の自動化はその方向で進められている。<sup>8)</sup>

ところで、タンクモデルのような決定論的モデルを求める際に我々は暗黙のうちにモデルを精密にすれば将来の予測はいくらでも精確にできるという期待を持っている。何故なら雨や河川流水の水は力学的法則に従っており、それらの水の動きを知ることはよって降雨や河川流水の動きを全て知ることができる筈である。ところが雨量や流量の観測データに測定誤差が入ってくることは避け難いからモデルの精密化をある程度から先でやることは意味が薄くは、てくる。そのうえ雨量データ自体、実際降った総雨量を測定したものでは無く、ある地点の雨量で流域の雨量を代表させているのであるから尚更である。また、ある地点をある日に通過する水の量は同じ地点を前日に通過する水の量とは大いに関係があるとしても、数十日あるいは数日前の量の多少とは殆んど関係が薄いという点を考慮すると、河川流量時系列はエルゴード的であると仮定して議論を進めてもひどく現実とかけ離れて

いえると言えはいいであらう。そこである地点において入手可能な過去の水流量データをもとに翌日に通過する水の量の統計的分布を特定する為、タンクモデルに匹敵するよう、統計的非線型入出力システムモデルを以下で考えてみることにする。

タンクモデルのタンクに貯えられてゐる水の貯蔵量 $z_t$ と流出量 $x_t$ の間には図6のような非線型な関係がある。このような即時的非線型性は統計的入出力システムモデルに次のような形で取り入れることができる。

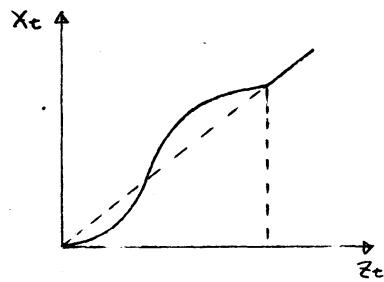


図6 タンク貯蔵量 $z_t$ と流出量 $x_t$ の間の非線型性

$$x_t = C_1 + z_{t-1} + C_2 z_{t-1}^2 + \cdots + C_r z_{t-1}^r + \varepsilon_t \quad (6)$$

ここに  $z_{t-1} = a_1 x_{t-1} + \cdots + a_p x_{t-p} + b_1 y_{t-1} + \cdots + b_g y_{t-g}$ ,  $\varepsilon_t$  は分散  $\sigma^2$  の正規ホワイトノイズ。  $z_{t-1}$  はその形からわかるように過去の流量と雨量の線型結合で表わされるようなある中間変数で流出  $x_t$  はその非線型変換にホワイトノイズが加わったものとして表現される。2次以上の非線型項の係数がゼロのときは(5)式の線型入出力モデルに一致する。モデル次数  $p, g, r$  と係数の推定はAIC最小化により行うことができる。<sup>9)</sup> モデルのAICは近似的に

$$AIC(p, g, r) = N \cdot \log \hat{\sigma}^2 + 2(p + g + r)$$

で与えられる。ここに  $\hat{\sigma}^2$  は  $\varepsilon_t$  の分散の最小二乗推定量である。非線型モデル (6) と前出の二つの線型モデル (3), (5) を神流川の雨量流量 (図2) に適用すると表3のような結果を得る。雨量情報は入出力流量データだけを使って ARMA モデルをみてみると 4 次の AR モデルが最小 AIC モデルとして採択される。雨量データも考慮に入れた線型入出力モデルでは  $p=5, q=2$  のモデルが最小 AIC モデルとして採択される。

Non-linear I/O model N(p,q,t)		
N(p,q,t)	$\hat{\sigma}^2$	AIC
N(6,2,3)	$0.3179 \times 10^{-2}$	-2042.6
N(6,1,3)	$0.3202 \times 10^{-2}$	-2042.1
N(5,2,3)	$0.3207 \times 10^{-2}$	-2041.5
N(6,1,4)	$0.3191 \times 10^{-2}$	-2041.3
N(6,3,3)	$0.3176 \times 10^{-2}$	-2041.0
N(7,2,3)	$0.3176 \times 10^{-2}$	-2041.0
Linear I/O model L(p,q)		
L(p,q)	$\hat{\sigma}^2$	AIC
L(5,2)	$0.4157 \times 10^{-2}$	-1983.9
Autoregressive model AR(p)		
AR(p)	$\hat{\sigma}^2$	AIC
AR(4)	$0.1344 \times 10^{-1}$	-1567.3

表3 神流川流量予測モデルとそのAIC

4 次の AR モデルの場合より AIC

の値が大幅に小さくなり、つまり雨量をモデルにとり入れることにより予測が大幅に改善されることわかる。非線型モデルにすると  $p=6, q=2, t=3$  のモデルが最小 AIC モデルとして採択されその AIC 値は更に小さくなる。この非線型入出力システムモデルを、神流川データ (図2) の 280 日分のデータを使って推定し残りの 86 日分の一ステップ先予測を繰り返した場合が図7である。以上は日流量と日雨量に関する予測モデルであるが、時間雨量と時間流量に関して同じようなモデル化をすれば洪水期などの予測誤差をさらに小さくすることができる。

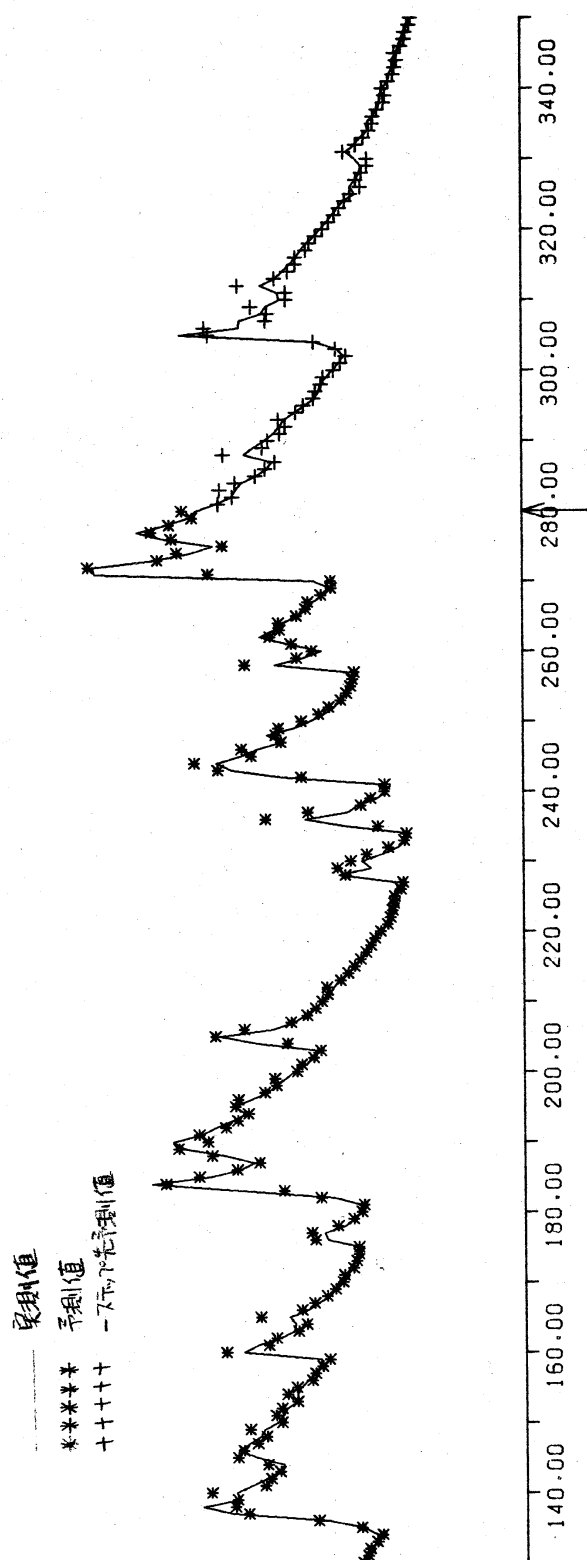


図7. 非線型入水モデル N(6.2.3) による神流川流量の予測



以上で雨量時系列が同時に観測されている時は非線型入出力システムモデルが河川の予測に有効であることとみたが次節ではこれを模擬流量発生モデルに使うことを考えてみよう。

#### 4. マーク点過程モデル

前節の非線型入出力システムモデル(2)を模擬流量発生モデルとして使うには入力である雨量を発生させる模擬雨量モデルが必要である。ところで日雨量の時系列は図2にもあるようにその非ガウス性は河川の日流量時系列よりもさらに強い。降雨量ゼロの日が何日も続いたり集中豪雨があったりと、たことと線り返す。このような時系列は統計的取り扱いの最も難しいものの一つであるが、以下で述べるように時系列の特徴的な構造をとり出して組み入れることにより、統計的モデルを構成することが可能である。

統計的現象としての日降雨量を特徴づけるものとして二つの点が考えられる。一つは降雨日から降雨日まで、の間隔の分布で、もう一つは降雨日に観測される日降雨量の分布である。図8は神流川の一、年間、の雨量データ(図2参照)の降雨日の間隔の度数分布で、図9は昭和23年4月1日から昭和43年3月31日までの20年間に本曾川上流、宮、越地点観測された日雨量データ( $N=7305$ )の降雨日の間隔の度数分布である。どちらも指数分

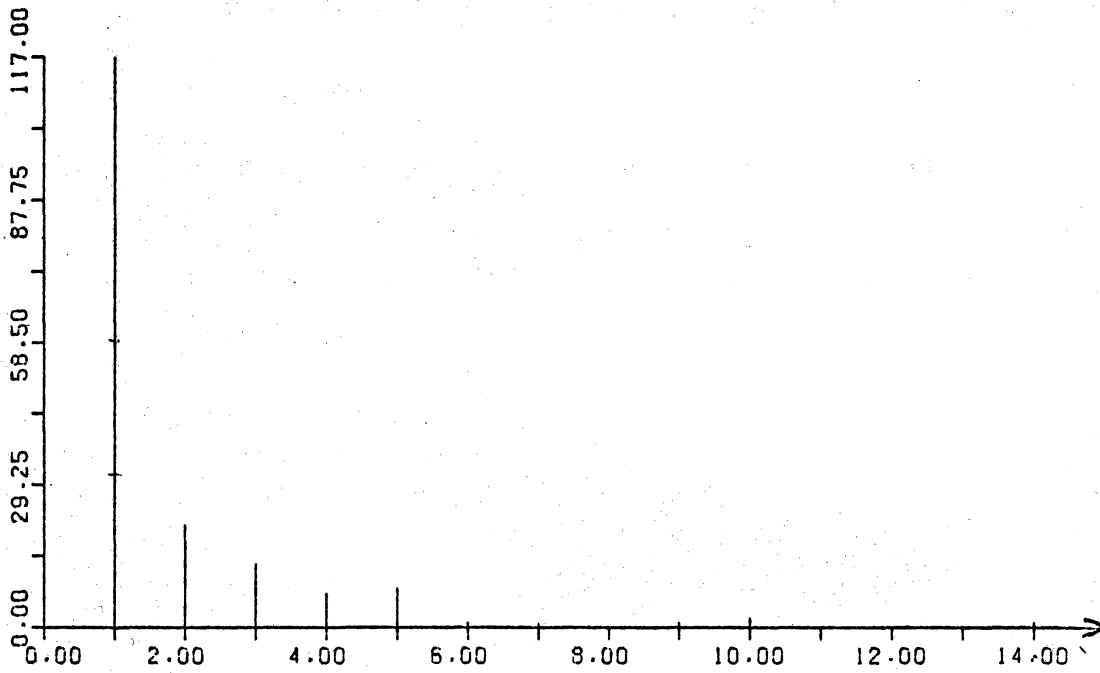


図8. 神奈川日雨量一夕(N=366)の降雨日と次降雨日の間隔の度数分布

日

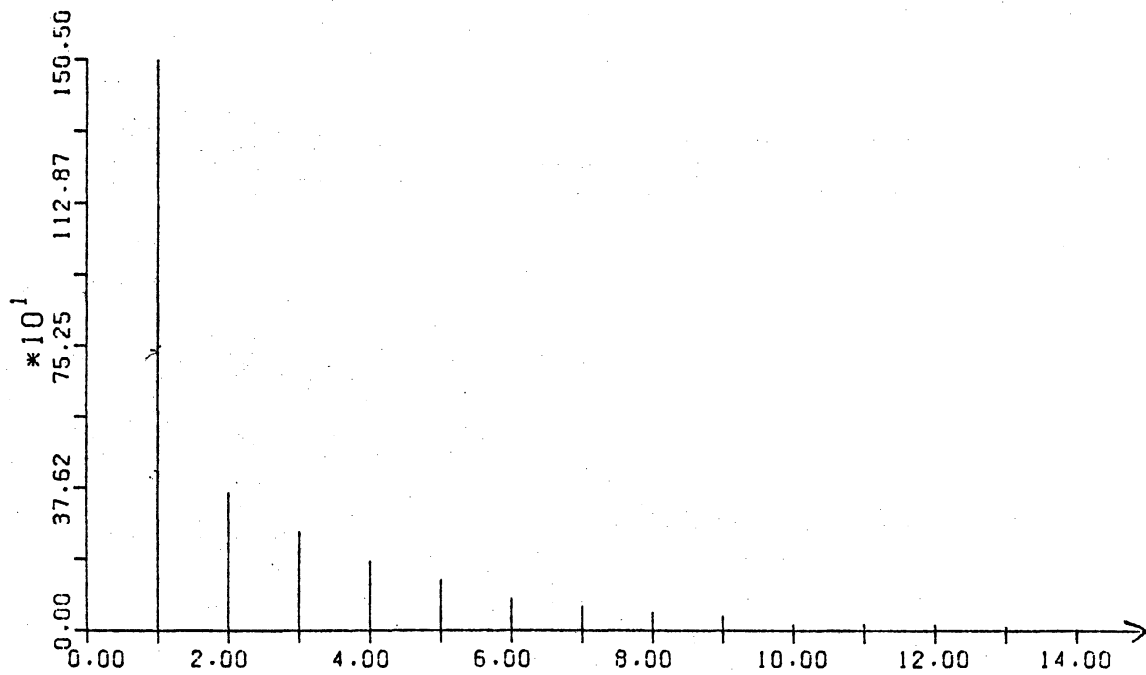


図9. 木曾川宮の越日雨量一夕(N=7305)の降雨日と次降雨日の間隔の度数分布

日

布に近い形をしており、降雨日の確率過程として最も単純なものとしてはポアソン点過程を想定することができるところで日本では梅雨期と秋の台風期に雨の降る確率が高くなる。実際に、越後の20年間の雨量データの点過程としてのペリオドグラムを推定してみると図10のようになり、年周期成分とその高調波の部分に明らかなピークが存在する。このような点

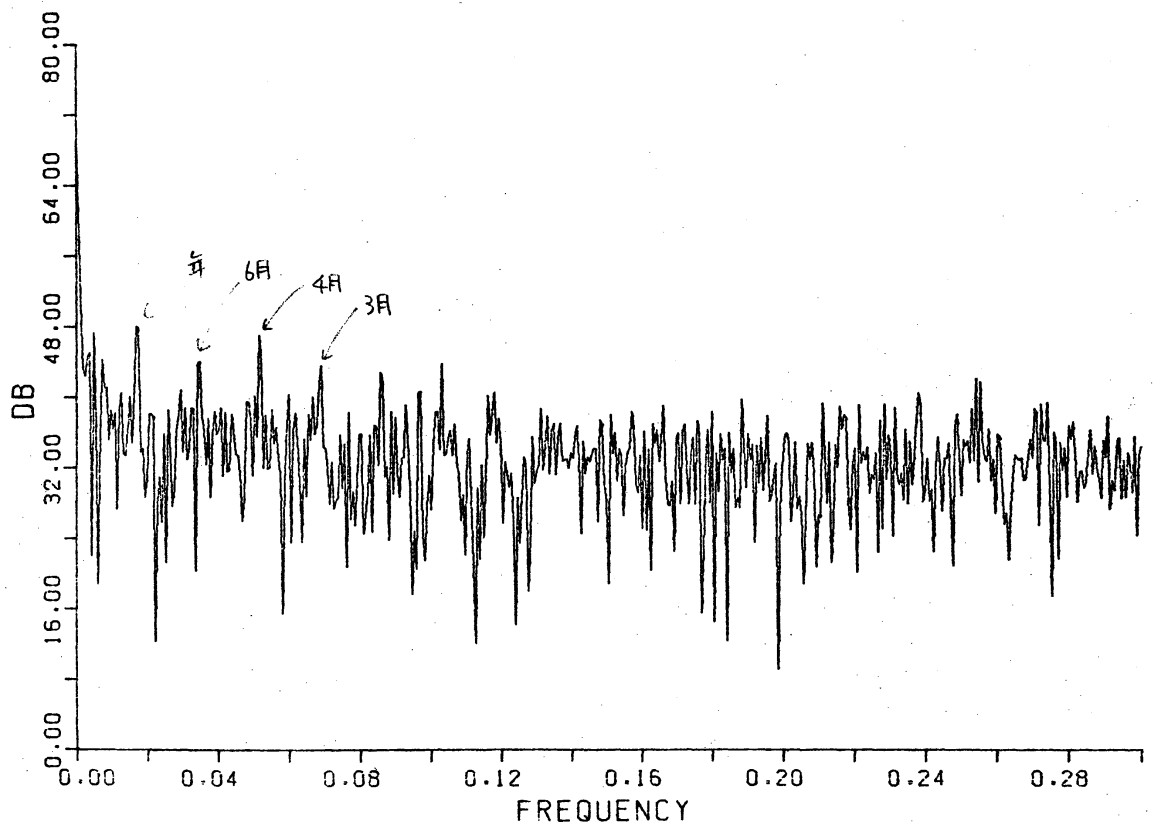


図10 越後県雨データのペリオドグラム

過程の特徴は次式によって定義される強度関数  $\lambda(t)$  をパラメータ化することによって統計的モデルに取り入れることができる。

$$\text{Prob} \{ \Delta N(t) = 1 \} = \lambda(t) \Delta t + o(\Delta t)$$

ここに  $\Delta N(t)$  は区間  $[t, t+\Delta t)$  の間に発生した点の数。例えば強度関数が周期的に変化し、しかも  $L$  個の周波数成分  $\omega_1, \dots, \omega_L$  を持つ場合、

$$\lambda(t) = \mu + \sum_{i=1}^L A_i \sin(\omega_i t + \theta_i)$$

の如く表現できる。ただし、 $\mu, A_i, \omega_i, \theta_i$  ( $i=1, \dots, L$ ) は  $\lambda(t) \geq 0$  を満たすとする。このように強度関数が周期的に変化する点過程を周期的ポアソン点過程と呼ぶ。

降雨日における降雨量の度数分布は神流川雨量の場合 ( $N=366$ ) が図11, 宮の越地点の場合 ( $N=7305$ ) が図12である。これらの図から降雨量の分布は指数分布かそれより裾の長いガンマ分布

$$P(x) = x^{\alpha-1} \exp(-x/\beta) / (\beta^\alpha \Gamma(\alpha))$$

が示唆される。ここで降雨日の起り方と降雨量とが独立であると仮定するとモデルの最尤法によるあてはめ、及びモデルを用いたシミュレーションは容易である。<sup>(10)</sup> このように点過程と点に付随した確率変数を持つモデルはマーク点過程と呼ばれる。図2の神流川の雨のデータにこのモデルをあてはめるとガンマ分布に関して最尤推定値  $\hat{\alpha} = 0.5547, \hat{\beta} = 13.1561$  を得る。周期的ポアソン点過程に関しては  $\hat{\mu} = 0.4766, \hat{A}_1 = -0.2624, \hat{A}_2 = -0.1214, \hat{A}_3 = 0.1169, \hat{\theta}_1 = 1.1853, \hat{\theta}_2 = 1.1034, \hat{\theta}_3 = -0.7155$  を得る。

但し周期は年周期6ヵ月、4ヵ月の三成分に固定した。この最尤推定周期ポアソン点過程の強度関数を1月1日から12月31日

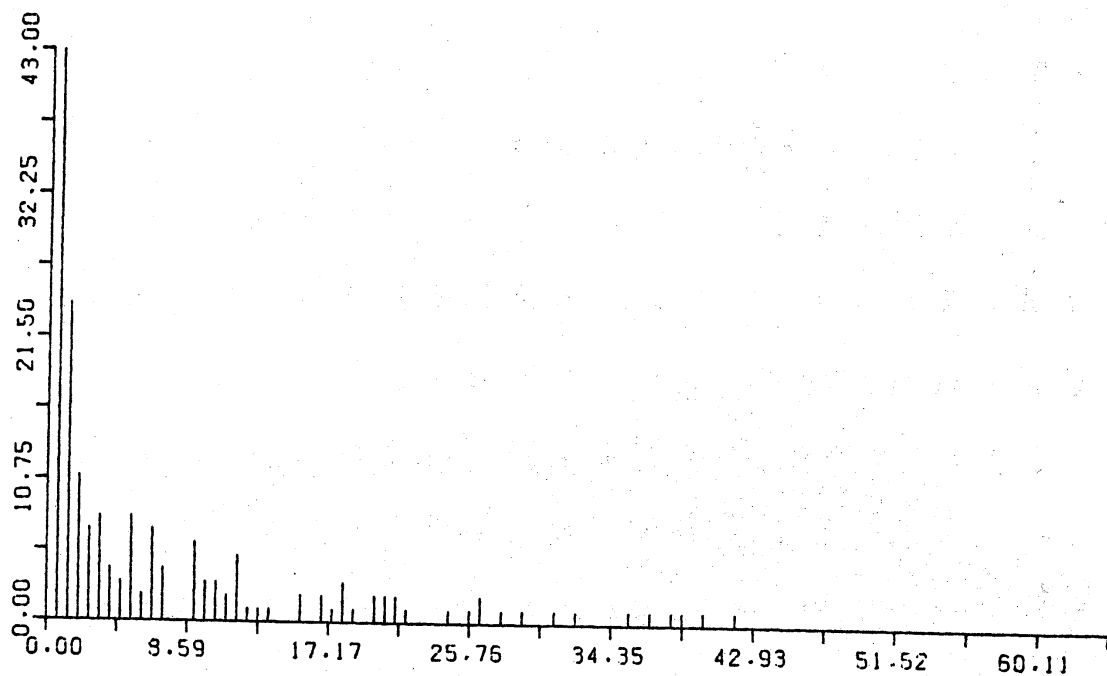


図11 神流川の雨量と4日の降雨量の度数分布

降雨量

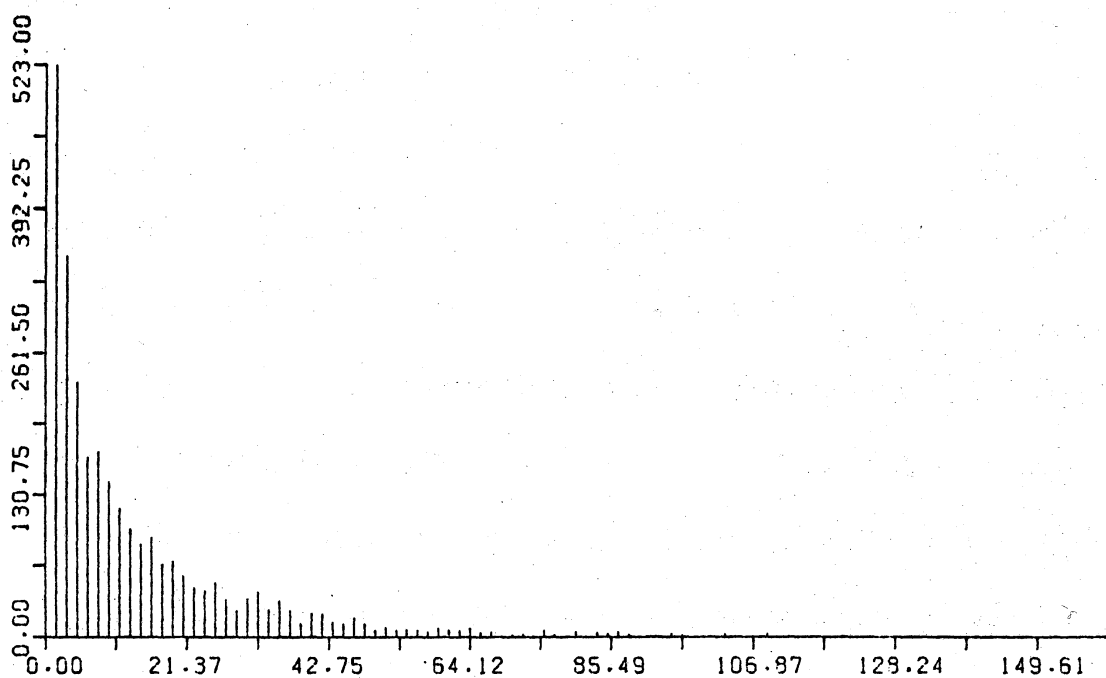


図12 槽川の水越の雨量と4日の降雨量の度数分布

降雨量

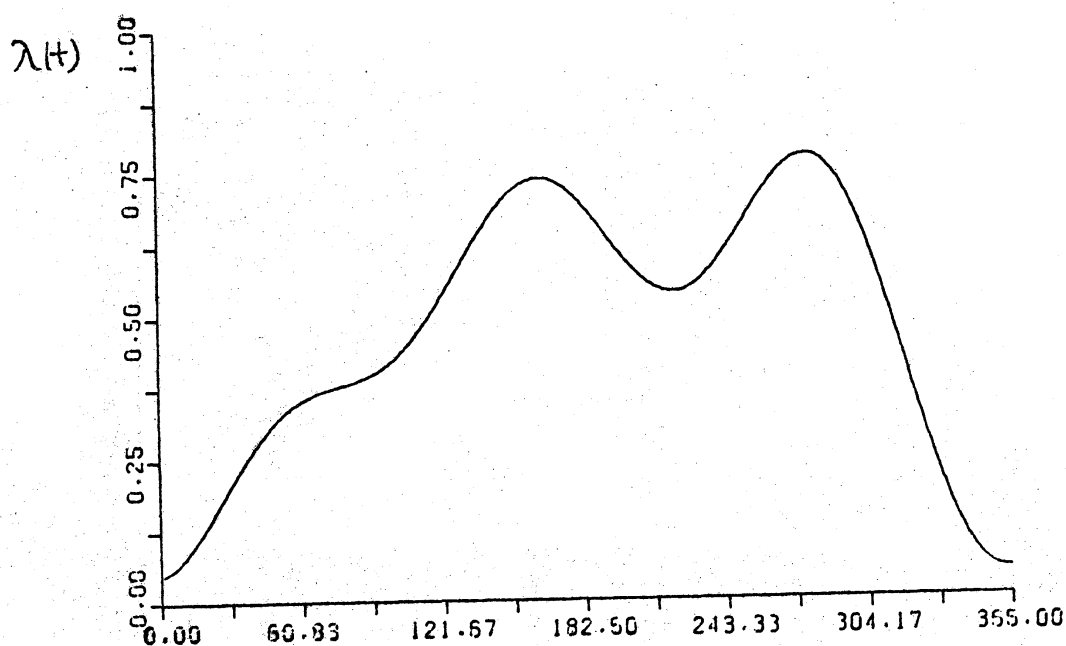


図13 神流川日雨量の周期的ホアン点過程モデルの発達関数

まで図に描いてみると図13のようになります。その季節的な変動の特徴が読みとれる。このモデルを使ってシミュレーションをすると図14のような模擬雨量を発生させることができます。この模擬雨量が神流川流域に降、たとしてその時の模擬流量を、前節の神流川の非線型入出力システムモデルを使って、発生させると図15のようになります。2節のFGNモデルやARMAモデルによる模擬流量図3、図4と比べてはるかに流量らしい特徴を備えたデータを再現できると言えよう。

## 5. 終りに

以上模擬流量発生手段と流量予測に関する統計的モデルを考察してきたが、今後残された問題はこれを多変量化すること

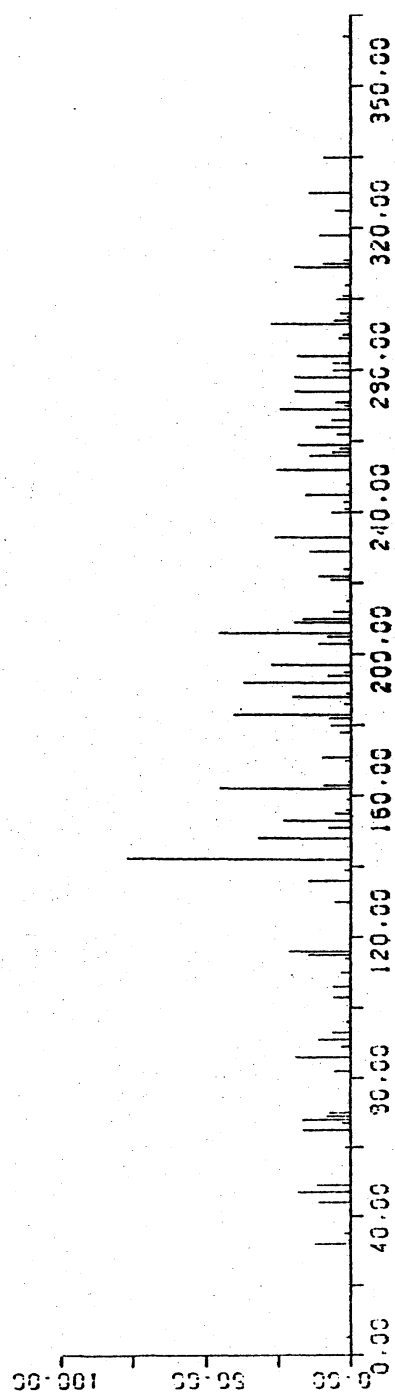


図14. 2-7点局程モデルによる神流川の模擬雨量

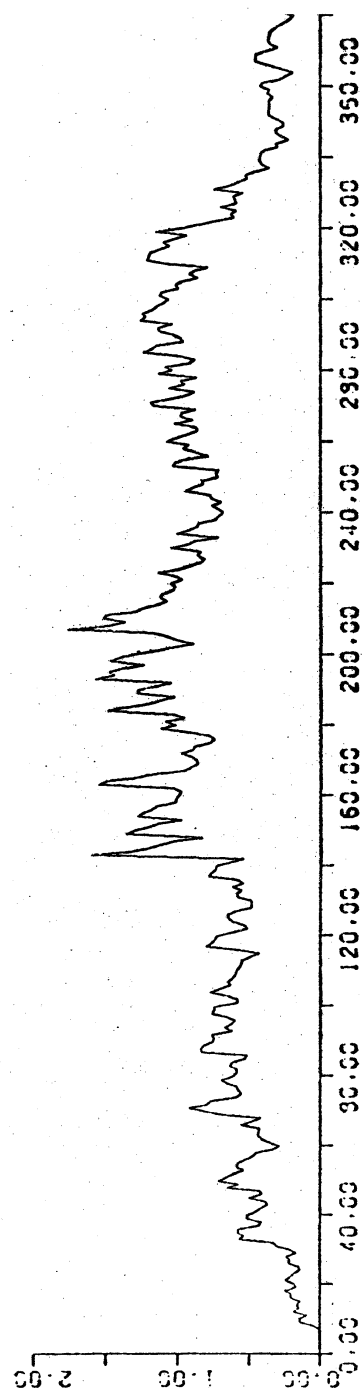


図15. 模擬雨量と非線型入出力モデルN(6.2.3)による神流川の模擬流量

とであらう。一般に河川は何本かの支流から成り、取水は上流や下流へ様々な地点で行われ、 $n$  箇所を、代表的な地点間の相互相関を考慮に入れた模擬流量発生モデルが要求される。この場合、河川全体に影響を与える降雨量は河川流域の各地点で観測されており、雨量時系列も互いに相関の強い多変量点過程として取り扱う必要が生じる。相関のある多変量点過程の統計的解析は全く未開拓の分野であり今後の発展が期待される。最後に御協力頂いた水利科学研究所の有賀美彦氏及び中部地方建設局木曽川工事事務所の方々に感謝致します。

#### 参考文献

- 1) 杉浦明平訳「レオナルド・ダ・ヴィンチの手記」岩波文庫
- 2) Hurst, H.E. "Long-term storage capacity of reservoirs", Trans. Amer. Soc. Civil Eng. 770-808, 1951.
- 3) Mandelbrot, B.B. and Van Ness, J.W. "Fractional Brownian motions, Fractional noises and applications, S.I.A.M. Rev., 422-437, 1968.
- 4) Mandelbrot, B.B. "Une classe de processus stochastiques homothetiques a soi: Application a la loi climatologique de H.E. Hurst", Compt. Rend. Acad. Sci. 3274-3276. 1965.
- 5) McLeod, A.I. and Hipel, K.W. "Preservation of the Rescaled Adjusted Range 1. A Reassessment of the Hurst Phenomenon" Water Resources Res. 491-508, 1978.



- 6) Annis, A.A. & Lloyd, E.H. "The expected value of the adjusted rescaled Hurst range of independent normal summands, *Biometrika*, 63, 1976.
- 7) Sugawara, M. "On the analysis of Runoff Structure about Several Japanese Rivers" *Jap. Journal of Geophysics*, 1-76, 1961.
- 8) 菅原正己 他「タニクモデルの構造を自動的に定める計算機プログラム」の開発, 国立防災科学技術センター - 研究報告第17号, 43-89, 1977.
- 9) Ozaki, T. "On a model of non-linear feed-back system for riverflow prediction" *Water Resources Research*, 225-231
- 10) Ozaki, T. "Point process and non-linear systems modelling in stochastic hydrology" to be presented at the 4-th International Time Series Meeting, Valencia, 1981.